

Elevación y proyección

Raíces, rotaciones y el rango de un estado

ROY GONZALEZ

Investigador independiente

RESUMEN Estudiamos un único mecanismo elemental bajo varias formas: un problema planteado en un espacio de dimensión n cuya solución, o cuya descripción más simple, vive en un espacio de dimensión mayor, y la pérdida de información que se produce cuando esa solución se proyecta de vuelta. En primer lugar, demostramos una tricotomía para las matrices reales con $M^3 = \varepsilon M$, $\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}$, cuyas exponenciales dan, con una sola fórmula, rotaciones (Rodrigues), cizallas (traslaciones y transformaciones de Galileo) y rotaciones hiperbólicas (transformaciones de Lorentz). En segundo lugar, determinamos las soluciones de una ecuación cuadrática real de discriminante negativo en varias álgebras reales: ninguna en $\mathbb{R}$, dos en $\mathbb{C}$, ninguna en $M_n(\mathbb{R})$ para n impar, un hiperboloide de dos hojas en $M_2(\mathbb{R})$ y una esfera bidimensional en los cuaterniones; las dos raíces complejas son la traza de la esfera sobre una sección compleja. En tercer lugar, registramos tres artefactos de la proyección ortogonal, a saber, la aniquilación aparente, la inversión de la orientación y la no identificabilidad, y la condición bajo la cual varias proyecciones recuperan el estado. En cuarto lugar, realizamos el grupo de Galileo en $GL(n+2, \mathbb{R})$, de modo que la velocidad es una cizalla alimentada por la coordenada temporal, y calculamos un ejemplo explícito de cinemática robótica. En quinto lugar, expresamos la separabilidad de un estado compuesto como una condición de rango, damos un modelo real de doce componentes en el que una sola matriz nilpotente fija en un paso dos resultados separados, y recordamos por qué los modelos construidos con dos objetos separados satisfacen la cota de Bell–CHSH mientras que el modelo de un solo objeto no.

PALABRAS CLAVE fórmula de Rodrigues; generadores nilpotentes e hiperbólicos; ecuaciones cuadráticas en álgebras reales; cuaterniones; proyección ortogonal; coordenadas homogéneas; grupo de Galileo; rango de Schmidt; desigualdad de Bell–CHSH

I. INTRODUCCIÓN

Buena parte de la matemática elemental es el arte de elegir el espacio en el que un problema es sencillo. La ecuación $x^2 + 4 = 0$ no tiene solución en la recta y tiene dos en el plano; la perspectiva no es lineal en tres coordenadas y es lineal en cuatro; el oscilador armónico es de segundo orden en una variable y una rotación de primer orden en dos. En cada caso un problema se *eleva* a un espacio mayor, se resuelve allí y se *proyecta* de vuelta.

El presente artículo aísla este mecanismo y lo estudia, con demostraciones completas, en varios contextos concretos. Ninguno de los resultados individuales es profundo, y varios son clásicos; el interés reside en ponerlos uno junto a otro, en precisar el sentido en que «el número de soluciones» o «el número de objetos» depende del espacio ambiente, y en separar lo que una proyección conserva de lo que destruye. En todo el texto los espacios vectoriales son reales y de dimensión finita salvo indicación contraria, E_{pq} denota la matriz elemental con un 1 en la fila p y la columna q , y $\{e_k\}$ es la base canónica. Los valores numéricos citados se calcularon en doble precisión IEEE; se dan valores exactos cuando se conocen.

2. TRES CLASES DE GENERADOR

Definición 2.1. Una matriz $M \in M_n(\mathbb{R})$ es un *generador de tipo* $\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}$ si $M^3 = \varepsilon M$.

Los tres tipos se realizan mediante las matrices elementales que subyacen a las geometrías euclídea, afín y lorentziana. Para $p \neq q$ se pone

$$M_{pq} = E_{qp} - E_{pq}, \quad N_{pq} = E_{pq}, \quad K_{pq} = E_{pq} + E_{qp}. \quad (2.1)$$

Un cálculo directo da $M_{pq}^2 = -(E_{pp} + E_{qq})$, luego $M_{pq}^3 = -M_{pq}$; $N_{pq}^2 = 0$; y $K_{pq}^2 = E_{pp} + E_{qq}$, luego $K_{pq}^3 = K_{pq}$. La matriz M_{pq} gira e_p hacia e_q en el plano que generan, N_{pq} alimenta la coordenada q -ésima en la p -ésima, y K_{pq} las intercambia simétricamente.

Lema 2.2. Si $M^3 = \varepsilon M$, entonces $M^{2k+1} = \varepsilon^k M$ y $M^{2k+2} = \varepsilon^k M^2$ para todo $k \geq 0$, con el convenio $0^0 = 1$.

Demostración. Ambas identidades valen para $k = 0$. Si valen para k , entonces $M^{2k+3} = M^{2k+1} M^2 = \varepsilon^k M^3 = \varepsilon^{k+1} M$ y $M^{2k+4} = M^{2k+2} M^2 = \varepsilon^k M^2 M^2 = \varepsilon^{k+1} M^2$. $\square$

Teorema 2.3 (la fórmula de Rodrigues y sus dos compañeras). Sea M un generador de tipo ε . Para todo $\theta \in \mathbb{R}$,

$$e^{\theta M} = I + S_\varepsilon(\theta) M + C_\varepsilon(\theta) M^2, \quad (2.2)$$

donde $S_{-1} = \sin$, $C_{-1} = 1 - \cos$; $S_0(\theta) = \theta$, $C_0(\theta) = \theta^2/2$; $S_1 = \sinh$, $C_1 = \cosh - 1$.

Demostración. La serie exponencial converge absolutamente, de modo que puede separarse según la paridad del exponente. Por el lema 2.2,

$$e^{\theta M} = I + \left(\sum_{k \geq 0} \frac{\varepsilon^k \theta^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) M + \left(\sum_{k \geq 0} \frac{\varepsilon^k \theta^{2k+2}}{(2k+2)!} \right) M^2.$$

Para $\varepsilon = -1$ las dos series son las de $\sin \theta$ y $1 - \cos \theta$; para $\varepsilon = 1$, las de $\sinh \theta$ y $\cosh \theta - 1$; para $\varepsilon = 0$ solo sobreviven los términos con $k = 0$. $\square$

Para $\varepsilon = -1$ esta es la fórmula de rotación que suele atribuirse a Rodrigues (Rodrigues 1840). En el plano de M_{pq} , donde $M^2 = -I$, se reduce a $\cos \theta I + \sin \theta M$, que es la fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ (Euler 1748) con la matriz real M en lugar de i . Para $N = N_{pq}$ se tiene también $M^2 = 0$, y (2.2) se reduce a $e^{dN} = I + dN$: una cizalla. Para $K = K_{pq}$ da $e^{\varphi K} = I + \sinh \varphi K + (\cosh \varphi - 1)K^2$, una rotación hiperbólica del plano (e_p, e_q) que fija las demás coordenadas.

Observación 2.4. Los tres casos están relacionados por contracción. En el plano (x, t) , restituida la velocidad de la luz c , la transformación de Lorentz de velocidad v es $\Lambda_c = \gamma \begin{pmatrix} 1 & v/c \\ v/c & 1 \end{pmatrix}$, $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, y $\Lambda_c \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{vN}$ cuando $c \rightarrow \infty$. Es el caso más simple de las contracciones de grupos de İnönü y Wigner (İnönü y Wigner 1953).

3. UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA EN VARIAS ÁLGEBRAS

Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ y vértice $h = -b/2a$. Para toda álgebra real asociativa y unitaria $\mathcal{A}$ buscamos las soluciones de $f(x) = 0$ en $\mathcal{A}$, leyendo f con coeficientes reales.

Lema 3.1 (la parábola elevada). Sea $u \in A$ con $u^2 = -1$. Entonces, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$f(h + tu) = f(h) - at^2 = -\frac{\Delta}{4a} - at^2. \quad (3.1)$$

Demostración. Como h y t son reales, conmutan con u , y $(h + tu)^2 = h^2 + 2htu - t^2$. Por tanto $f(h + tu) = f(h) - at^2 + t(2ah + b)u$, y $2ah + b = 0$. $\square$

Geométricamente, el lema 3.1 dice que sobre el vértice, en la dirección u , la gráfica de f es la parábola $f(h) - at^2$, que se abre en sentido contrario a la original. Si $\Delta < 0$ la parábola original no corta el eje y la elevada sí, en $t = \pm\sqrt{-\Delta}/2a$. Para $f(x) = x^2 + 4$ los valores elevados en $t = 0, 1, 2, 3$ son 4, 3, 0, -5.

Teorema 3.2. Supóngase $\Delta < 0$. Para todo $u \in A$ con $u^2 = -1$, los elementos

$$x_{\pm} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} u \quad (3.2)$$

son soluciones de $f(x) = 0$ en A .

Demostración. Inmediato a partir del lema 3.1 con $t = \pm\sqrt{-\Delta}/2a$. $\square$

El conjunto de soluciones depende, pues, del conjunto de raíces cuadradas de -1 en A y de que existan o no otras soluciones. Tratamos los casos por separado.

Proposición 3.3 (la recta y el plano). En $A = \mathbb{R}$ no hay solución. En $A = \mathbb{C}$ hay exactamente dos, $h \pm \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} i$. Identificando $\mathbb{C}$ con la subálgebra $\{\alpha I + \beta J\} \subset M_2(\mathbb{R})$, $J = M_{01}$, estas son las matrices reales $hI \pm \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} J$.

Demostración. La primera afirmación es el signo de f en $\mathbb{R}$. En el cuerpo $\mathbb{C}$ un polinomio cuadrático tiene a lo sumo dos raíces, y el teorema 3.2 proporciona dos. La identificación es la usual, $J^2 = -I$. $\square$

Para $f(x) = x^2 - 2x + 5$ la raíz es $X = I + 2J = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, y $X^2 - 2X + 5I$ se anula idénticamente. Nada en el cálculo involucra un número no real.

Proposición 3.4 (dimensión impar). Si n es impar y $\Delta < 0$, la ecuación $f(X) = 0$ no tiene solución $X \in M_n(\mathbb{R})$. En particular, ninguna matriz real $n \times n$ tiene cuadrado $-I$.

Demostración. Si $f(X) = 0$, todo valor propio de X es raíz de f , luego X no tiene valores propios reales. Pero el polinomio característico de X tiene grado impar y coeficientes reales, y por tanto una raíz real. $\square$

Aun así, tres dimensiones contienen las soluciones del plano, una por cada eje. Para un vector unitario $k \in \mathbb{R}^3$ sea K_k la matriz de $v \mapsto k \times v$.

Proposición 3.5 (el generador de Rodrigues). $K_k^3 = -K_k$ y $K_k^2 = kk^T - I$. En consecuencia $(2K_k)^2 + 4I = 4kk^T$: la matriz $2K_k$ resuelve $X^2 + 4I = 0$ en el plano invariante $k^\perp$ y en ningún subespacio mayor.

Demostración. Por el doble producto vectorial, $K_k^2 v = k \times (k \times v) = (k \cdot v)k - v$, que es $(kk^T - I)v$. Entonces $K_k^3 = K_k(kk^T - I) = -K_k$ porque $K_k k = 0$. La última afirmación se sigue de que $4kk^T$ se anula exactamente en $k^\perp$. $\square$

Para $k = (1, 2, 2)/3$ el residuo $(2K_k)^2 + 4I$ anula $(2, -1, 0)$ y $(0, 1, -1)$ y envía k a $4k$; el cuarto de vuelta $R = e^{(\pi/2)K_k}$ cumple $R^2 = 2kk^\top - I$, que es $-I$ en $k^\perp$ y $+I$ en el eje. La proposición 3.4 explica por qué el eje ha de sobrevivir.

Proposición 3.6 (las matrices de orden dos). *El conjunto $\{X \in M_2(\mathbb{R}) : X^2 = -I\}$ es*

$$\left\{ \begin{pmatrix} p & q \\ r & -p \end{pmatrix} : p^2 + qr = -1 \right\},$$

un hiperboloide de dos hojas, cuyas hojas son las clases de conjugación de J y de $-J$.

Demostración. Por el teorema de Cayley–Hamilton, $X^2 - (\text{tr } X)X + (\det X)I = 0$. Si $X^2 = -I$, entonces X no es múltiplo real de I , y comparando ambas relaciones se obtiene $\text{tr } X = 0$ y $\det X = 1$; es decir, X tiene la forma indicada con $-p^2 - qr = 1$. Con $q = s + w$, $r = s - w$ la condición se escribe $w^2 - p^2 - s^2 = 1$. El signo de $w = (q - r)/2$ separa las hojas. La forma cuadrática $v \mapsto \det(v, Xv) = rv_1^2 - 2pv_1v_2 - qv_2^2$ tiene discriminante $4(p^2 + qr) = -4$, luego es definida, y su signo, el de su traza $r - q = -2w$, es el sentido en que X gira el plano. $\square$

Por el teorema 3.2, cada punto de este hiperboloide da una raíz de f en $M_2(\mathbb{R})$. Las dos raíces $\pm J$ de la subálgebra conmutativa $\mathbb{C}$ son los puntos $p = s = 0$.

Teorema 3.7 (cuaterniones). *Sean $b, c \in \mathbb{R}$ y considérese $x^2 + bx + c = 0$ en los cuaterniones de Hamilton $\mathbb{H}$ (Hamilton 1844).*

(I) *Si $\Delta \geq 0$, las soluciones son únicamente las raíces reales.*

(II) *Si $\Delta < 0$, las soluciones son exactamente $x = -\frac{b}{2} + \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}u$, donde u recorre la esfera unidad S^2 de los cuaterniones puros.*

Demostración. Escribáse $x = s + v$ con $s \in \mathbb{R}$ y v puro. Entonces $v^2 = -|v|^2$ y $x^2 = s^2 - |v|^2 + 2sv$. La ecuación se separa en una parte real y una parte pura:

$$s^2 - |v|^2 + bs + c = 0, \quad (2s + b)v = 0.$$

Si $v = 0$, $x = s$ es una raíz real. Si $v \neq 0$, entonces $s = -b/2$ y $|v|^2 = c - b^2/4 = -\Delta/4$, lo que solo es posible si $\Delta < 0$ (el caso $\Delta = 0$ fuerza $v = 0$). Recíprocamente, todo x de la forma indicada satisface ambas ecuaciones. $\square$

El teorema 3.7 es un caso particular del análisis de Niven de las ecuaciones polinómicas sobre los cuaterniones (Niven 1941); véase también Eilenberg y Niven 1944 para el teorema de existencia.

Corolario 3.8. *Para $\Delta < 0$ el conjunto de soluciones cuaterniónicas es una esfera redonda de radio $\sqrt{-\Delta}/2$ centrada en $-b/2$. Su intersección con cualquier sección compleja $\mathbb{C}_u = \text{span}\{1, u\}$, $u \in S^2$, consta exactamente de dos puntos, las raíces complejas.*

El número de soluciones es, pues, una propiedad del par (ecuación, álgebra) y no de la ecuación sola: para $x^2 + 4 = 0$ es 0 en $\mathbb{R}$, 2 en $\mathbb{C}$, 0 en $M_3(\mathbb{R})$, un hiperboloide de dos hojas en $M_2(\mathbb{R})$ y una esfera en $\mathbb{H}$. El teorema fundamental del álgebra (Gauss 1799) es un teorema sobre $\mathbb{C}$.

Un modelo real de los cuaterniones. La multiplicación por la izquierda $L: \mathbb{H} \rightarrow M_4(\mathbb{R})$ en la base $(1, i, j, k)$ es un homomorfismo inyectivo de álgebras reales, con

$$L(i) = M_{01} + M_{23}, \quad L(j) = M_{02} + M_{31}, \quad L(k) = M_{03} + M_{12}.$$

Se comprueba que $L(i)L(j)L(k) = -I$, la relación de Hamilton. Para un cuaternión puro unitario $u = u_1i + u_2j + u_3k$ se tiene $L(u)^2 = -I$ en todo $\mathbb{R}^4$, a diferencia del caso tridimensional de la proposición 3.5, y el teorema 2.3 con $M^2 = -I$ da $e^{\theta L(u)} = \cos \theta I + \sin \theta L(u)$. La raíz de $x^2 + 4 = 0$ asociada a u es la matriz real $2L(u) = 2e^{(\pi/2)L(u)}$: un cuarto de vuelta de $\mathbb{R}^4$ en dos planos ortogonales a la vez, escalado por dos. En coma flotante el residuo $X^2 + 4I$ es exactamente cero para $u \in \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0.6, 0.8), (1, 2, 2)/3\}$, y el residuo de $X = I + 2L(u)$ en $x^2 - 2x + 5 = 0$ es a lo sumo 4.4×10^{-16} .

4. LO QUE UNA PROYECCIÓN DESCARTA

Sea $V \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio de dimensión m y P la proyección ortogonal sobre V . Consideramos P como una observación que registra las componentes en V y descarta el núcleo, de dimensión $n - m$.

Proposición 4.1 (tres artefactos). Sean $e_1 \in V$ y $e_n \perp V$, y sea $R_\theta = e^{\theta M_{1n}}$.

- (I) Aniquilación aparente. $\|R_\theta e_1\| = 1$ para todo θ , mientras que $PR_\theta e_1 = \cos \theta e_1$. El vector observado se encoge, desaparece en $\theta = \pi/2$ y reaparece invertido.
- (II) Inversión de la orientación. La compresión $C_\theta = PR_\theta|_V$ cumple $\det C_\theta = \cos \theta$. Por tanto C_π es una reflexión de V , aunque R_π está en la componente de la identidad de $SO(n)$; el camino $\theta \mapsto C_\theta$ de I a una reflexión pasa por la aplicación singular $C_{\pi/2}$.
- (III) No identificabilidad. Los estados s, s' con $s - s' \in \ker P$ se observan de manera idéntica.

Demostración. R_θ actúa como la identidad fuera del plano (e_1, e_n) y envía $e_1 \mapsto \cos \theta e_1 + \sin \theta e_n$ y $e_n \mapsto -\sin \theta e_1 + \cos \theta e_n$. Proyectando se obtiene (i), y en una base de V que contenga e_1 la compresión es $\text{diag}(\cos \theta, 1, \dots, 1)$, lo que da (ii). (iii) es la linealidad. $\square$

La parte (ii) es la forma algebraica de la observación de Möbius de que una rotación a través de una cuarta dimensión lleva una figura tridimensional sobre su imagen especular (Möbius 1827). En el caso $n = 4, m = 3$ la compresión en $\theta = \pi$ es $\text{diag}(-1, 1, 1)$, y los dos estados $(1, 2, 3, 0)$ y $(1, 2, 3, 7)$, a distancia 7, tienen la misma imagen.

Proposición 4.2 (recuperación a partir de varias vistas). Sean $P_1, \dots, P_r$ aplicaciones lineales en $\mathbb{R}^n$. La aplicación apilada $s \mapsto (P_1 s, \dots, P_r s)$ es inyectiva si y solo si $\bigcap_i \ker P_i = \{0\}$.

Demostración. El núcleo de la aplicación apilada es la intersección de los núcleos. $\square$

Una pelota que se mueve en un plano vertical, $(x, y)(t)$, proyecta bajo un sol de elevación α la sombra $s = x + y \cot \alpha$, una sola fila $P_\alpha = (1, \cot \alpha)$. A partir de s sola, la aceleración aparente es $g \cot \alpha$ y las velocidades horizontal y vertical quedan confundidas. Dos elevaciones $\alpha_1 \neq \alpha_2$ dan un sistema 2×2 invertible, del que se recupera exactamente la altura oculta $y(t)$.

5. COORDENADAS HOMOGÉNEAS Y VELOCIDAD

5.1 La posición como cizalla

Escríbase un punto de $\mathbb{R}^n$ como (x, w) con $w = 1$. Una traslación por d es la cizalla $e^{\sum_i d_i N_{i,w}} = I + \sum_i d_i N_{i,w}$, y el grupo afín se sumerge en $\text{GL}(n+1, \mathbb{R})$ como las matrices $\begin{pmatrix} R & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (Möbius 1827). Las cadenas cinemáticas de la robótica son productos de tales matrices (Denavit y Hartenberg 1955); las rotaciones en las articulaciones son de tipo -1 y los desplazamientos de los eslabones de tipo 0, en el sentido de la sección 2.

5.2 La velocidad como cizalla

Añádase una coordenada temporal y escríbase un suceso como $(x, w, t) \in \mathbb{R}^{n+2}$ con $w = 1$.

Proposición 5.1. *La aplicación*

$$(R, a, v, \tau) \mapsto G(R, a, v, \tau) = \begin{pmatrix} R & a & v \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \tau & 1 \end{pmatrix}, \quad R \in \text{SO}(n), a, v \in \mathbb{R}^n, \tau \in \mathbb{R},$$

es un homomorfismo inyectivo del grupo de Galileo en $\text{GL}(n+2, \mathbb{R})$. Actúa sobre los sucesos mediante $x \mapsto Rx + a + vt$, $t \mapsto t + \tau$, y la composición cumple $v = v_1 + R_1 v_2$.

Demostración. Multiplíquense dos de tales matrices: el bloque superior izquierdo es $R_1 R_2$, la columna de traslación es $R_1 a_2 + a_1 + v_1 \tau_2$, la columna de velocidad es $R_1 v_2 + v_1$ y la entrada temporal es $\tau_1 + \tau_2$. Son las leyes de composición de Galileo. La inyectividad es evidente a partir de las entradas. $\square$

En esta realización, la posición de un cuerpo la lleva la columna w y su velocidad la columna t . La velocidad pura $D_v = G(I, 0, v, 0) = e^{\sum_i v_i N_{i,t}}$ es una exponencial nilpotente. Una observación en un instante fijo es la proyección $(x, w, t) \mapsto x$ restringida a $t = t_0$; dos cuerpos en el mismo lugar con velocidades distintas tienen la misma imagen en t_0 , y sus imágenes se separan como $x + v(t - t_0)$.

Ejemplo 5.2 (un brazo de tres articulaciones). Considérese un brazo con una articulación de base q_0 en torno al eje vertical, un hombro q_1 y un codo q_2 en torno a ejes horizontales, y eslabones $l_1 = 0.5$ m, $l_2 = 0.4$ m. Su pose es el producto $e^{q_0 M_{xy}} e^{q_1 M_{xz}} e^{l_1 N_{x,w}} e^{q_2 M_{xz}} e^{l_2 N_{x,w}}$, y la mano es su columna w . Para $(q_0, q_1, q_2) = (30^\circ, 20^\circ, 50^\circ)$ la mano está en $(0.52538, 0.30333, 0.54689)$. Las velocidades articulares $(0, 10, -10)$ y $(0, 90, -90)$ grados por segundo dan velocidades de la mano de 0.08727 y 0.78540 m/s (la segunda es $\pi/4$), y sin embargo ambas configuraciones tienen la misma imagen en t_0 . Al cabo de 0.2 s las imágenes de primer orden son $(0.52021, 0.30034, 0.56329)$ y $(0.47885, 0.27646, 0.69449)$.

Proposición 5.3 (los dos codos). *Para la cadena plana de dos eslabones con $l_1 > l_2 > 0$, la aplicación $(q_1, q_2) \mapsto$ mano es dos a uno fuera de $q_2 \in \{0, \pi\}$: la configuración (q_1, q_2) y*

$$\left(q_1 + 2 \arctan \frac{l_2 \sin q_2}{l_1 + l_2 \cos q_2}, -q_2 \right)$$

tienen la misma imagen.

Demostración. La mano está a distancia $\rho = |l_1 + l_2 e^{iq_2}|$ del hombro, en la dirección $q_1 + \arg(l_1 + l_2 e^{iq_2})$. Sustituir q_2 por $-q_2$ conserva ρ y cambia de signo el argumento, que está en $(-\pi/2, \pi/2)$ porque $l_1 > l_2$; el cambio indicado de q_1 restablece la dirección. Por el teorema del coseno ninguna otra configuración tiene los mismos ρ y dirección, salvo cuando $\sin q_2 = 0$. $\square$

En el ejemplo anterior, la segunda configuración tiene el hombro en 64.06809° y el codo en -50° ; su mano coincide con la primera en todas las cifras mostradas.

5.3 La forma relativista

En unidades con $c = 1$, la transformación de Lorentz a lo largo de x es $e^{\phi K_{x,t}}$ por el teorema 2.3, con rapidez $\phi = \text{artanh } v$. Para $\phi = 0.5$ su bloque (x, t) tiene diagonal $\cosh 0.5 = 1.12763$ y fuera de la diagonal $\sinh 0.5 = 0.52110$. Para el brazo más rápido de arriba, $v = 0.78540$ metros por segundo, la rapidez es 2.6×10^{-9} , y la cizalla de Galileo de la proposición 5.1 es su contracción.

6. RANGO, SEPARABILIDAD Y UN SOLO OBJETO

6.1 La separabilidad como condición de rango

Un estado de un sistema compuesto con espacios componentes $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$ es un elemento de $\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^n \cong M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Es un *producto*, describable como un par de estados independientes, si tiene la forma $x \otimes y = xy^\top$.

Proposición 6.1. $\psi \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ es un producto si y solo si $\text{rango } \psi \leq 1$. Más en general, por la descomposición en valores singulares $\psi = \sum_k \sigma_k u_k v_k^\top$ (Schmidt 1907), el menor número de productos cuya suma es ψ es $\text{rango } \psi$, el número de σ_k no nulos.

La matriz real $\psi = (e_0 e_1^\top - e_1 e_0^\top)/\sqrt{2}$ tiene valores singulares $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ y rango dos. No es un par de estados. Describir tal sistema como «dos objetos» es la hipótesis de rango uno, y es falsa para ψ .

6.2 Un modelo de doce componentes

Damos ahora un modelo real finito de un objeto observado en dos lugares. Sea el espacio de estados $\mathbb{R}^{12}$ con coordenadas

$$(x_1, y_1, z_1, t_1, x_2, y_2, z_2, t_2, o, e_1, e_2, r),$$

donde los dos primeros grupos son el lugar y el instante en que el objeto se observa como A y como B , o registra si ha sido observado, e_1, e_2 son los resultados que muestran las dos vistas y $r \in \{\pm 1\}$ es una componente adicional. Las dos vistas son las proyecciones coordenadas de rango cinco

$$P_A = \sum_{k \in \{x_1, y_1, z_1, t_1, e_1\}} E_{kk}, \quad P_B = \sum_{k \in \{x_2, y_2, z_2, t_2, e_2\}} E_{kk}.$$

La separación de las vistas es la cizalla $S_u = I - uN_{x_1, t_1} + uN_{x_2, t_2}$; la observación pone $o = 1$; y el acoplamiento es la matriz nilpotente

$$N = N_{e_1, r} - N_{e_2, r}, \quad N^2 = 0, \quad C(o) = e^{oN} = I + oN.$$

Proposición 6.2. *Para todo estado s con $e_1 = e_2 = 0$ y $o = 1$, el estado $C(1)s$ cumple $e_1 = r$ y $e_2 = -r$; en particular $e_1 + e_2 = 0$. La cizalla S_u solo modifica x_1 y x_2 , y conmuta con $C(o)$. Para $o = 0$, $C(0) = I$.*

Demostración. $Ns = r(e_{e_1} - e_{e_2})$, lo que da la primera afirmación. $S_u - I$ y N involucran conjuntos disjuntos de filas y columnas, luego conmutan, y S_u solo actúa sobre las coordenadas x_1, x_2 . $\square$

Partiendo de $(0, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 1)$ y separando con $u = 1000$, las vistas quedan a 5000 unidades una de otra a lo largo de x ; tras la observación y el acoplamiento, P_A muestra $e_1 = 1$ y P_B muestra $e_2 = -1$. Una sola matriz actuando sobre un solo vector fijó ambos resultados mostrados en un paso. En las coordenadas de cualquiera de las dos vistas por separado, el cambio de la otra queda sin explicar.

6.3 Correlaciones y la cota CHSH

Supóngase ahora que cada vista mide según un ángulo, a para A y b para B , con resultados en $\{\pm 1\}$. Un *modelo de dos objetos* es aquel en que el resultado de A es una función $A(a, \lambda)$ y el de B una función $B(b, \lambda)$ del ajuste local y de una variable compartida λ con cierta distribución de probabilidad.

Teorema 6.3 (Bell; Clauser, Horne, Shimony y Holt). *En un modelo de dos objetos, la correlación $E(a, b) = \mathbb{E}[A(a, \lambda)B(b, \lambda)]$ cumple*

$$|E(a, b) - E(a, b') + E(a', b) + E(a', b')| \leq 2.$$

Demostración. Para λ fijo, la cantidad $A(a)(B(b) - B(b')) + A(a')(B(b) + B(b'))$ vale ± 2 , pues uno de los paréntesis es 0 y el otro ± 2 . Promediando en λ se obtiene la cota (Bell 1964; Clauser, Horne, Shimony y Holt 1969). $\square$

Un modelo de dos objetos con λ uniforme en la circunferencia y $A = \text{sgn} \cos(a - \lambda)$, $B = -\text{sgn} \cos(b - \lambda)$ da $E(a, b) = -(1 - 2|a - b|/\pi)$ para $|a - b| \leq \pi$, y en los ángulos $a = 0$, $a' = \pi/2$, $b = \pi/4$, $b' = 3\pi/4$ alcanza $|S| = 2$. La correlación medida en la naturaleza para un singlete de espín es $E(a, b) = -\cos(a - b)$, para la que $|S| = 2\sqrt{2} = 2.8284$, el mayor valor que permite la teoría cuántica (Tsirelson 1980).

Extiéndase ahora el modelo de doce componentes con una componente μ , uniforme en $[0, 1]$ e independiente de r , y hágase que el acoplamiento dependa de ambos ajustes: $e_1 = r$, y $e_2 = -r$ si $\mu < \cos^2 \frac{a-b}{2}$, $e_2 = r$ en otro caso. Entonces

$$E(a, b) = -\left(\cos^2 \frac{a-b}{2} - \sin^2 \frac{a-b}{2}\right) = -\cos(a - b),$$

de modo que este modelo alcanza $2\sqrt{2}$. Escapa al teorema precisamente porque e_2 depende de a : no es un modelo de dos objetos. La distribución marginal de e_2 es uniforme en $\{\pm 1\}$ sea cual sea a , de modo que la dependencia no puede usarse para transmitir un mensaje de A a B . En el lenguaje de este artículo, el modelo es local en $\mathbb{R}^{12}$, donde una matriz actúa sobre un vector, y no local solo en sus proyecciones.

7. INFINITAS COMPONENTES

7.1 Una longitud finita en infinitas direcciones

En ℓ^2 , el vector de coordenadas $u_k = 2^{-k/2}$, $k \geq 1$, tiene infinitas componentes no nulas y $\|u\|^2 = \sum_k 2^{-k} = 1$. Sus sumas parciales son $1 - 2^{-t}$; en doble precisión la suma parcial vale 1 por primera vez en $t = 54$, porque $1 - 2^{-54}$ está exactamente a medio camino entre 1 y su predecesor en coma flotante y se redondea a 1.

7.2 La torre de los grupos de rotaciones

$\mathbb{R}^n$ tiene $\binom{n}{2}$ planos coordinados, y los generadores M_{pq} , $p < q$, generan el álgebra de Lie $\mathfrak{so}(n)$. Las inclusiones $\mathrm{SO}(n) \subset \mathrm{SO}(n+1)$ tienen cocientes $\mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n) \cong S^n$, y el teorema 2.3 no depende de n : los mismos tres términos giran un plano en cualquier dimensión. El teorema de periodicidad de Bott muestra que los grupos de homotopía del límite directo $O = \bigcup_n O(n)$ se repiten con periodo ocho (Bott 1959).

7.3 La dimensión no es el cardinal

La expresión «más componentes» exige cuidado. Por el teorema de Cantor, $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^n|$ para todo n (Cantor 1878); por la invariancia de la dimensión de Brouwer, no hay homeomorfismo entre $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$ si $m \neq n$ (Brouwer 1911). Una elevación añade estructura, no puntos: las nuevas componentes son nuevas direcciones independientes de un espacio lineal o, al menos, topológico.

7.4 Una raíz cuadrada del laplaciano

La elevación de mayores consecuencias en física es la de Dirac. Sean $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $Y = iM_{01}$ y $Z = \mathrm{diag}(1, -1)$. Dadas $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ con $\gamma_a \gamma_b + \gamma_b \gamma_a = 2\delta_{ab}I$, las $n+2$ matrices $X \otimes \gamma_a$, $Y \otimes I$, $Z \otimes I$ satisfacen las mismas relaciones (Brauer y Weyl 1935), y para cualquier familia así el operador $D = \sum_a \gamma_a \partial_a$ sobre $C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^s)$ cumple $D^2 = \Delta$: al desarrollar, $D^2 = \sum_{a,b} \gamma_a \gamma_b \partial_a \partial_b = \frac{1}{2} \sum_{a,b} (\gamma_a \gamma_b + \gamma_b \gamma_a) \partial_a \partial_b = \Delta$ por la simetría de las derivadas segundas. Una ecuación escalar de segundo orden se convierte en una ecuación de primer orden al precio de $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ componentes (Dirac 1928; Lawson y Michelsohn 1989).

8. OBSERVACIONES FINALES

Los resultados anteriores comparten una moraleja, que puede enunciarse sin metáfora. Las soluciones de una ecuación, los objetos de un estado compuesto y las magnitudes visibles en una observación no son propiedades de la ecuación, del estado o del sistema por sí solos, sino del par que forman con un espacio ambiente. Una cuadrática de discriminante negativo no tiene raíces, tiene dos, un hiperboloide o una esfera de raíces según el álgebra en que se lea; un estado de rango dos es un objeto que ningún par de objetos puede representar; una proyección ortogonal convierte rotaciones en aniquilaciones y reflexiones. Cuando un problema parece imposible, o dos cosas parecen actuar una sobre otra sin contacto, vale la pena preguntarse si se está mirando una proyección, y de qué espacio lo es.

REFERENCIAS

- Bell, J. S. (1964). On the Einstein Podolsky Rosen paradox. *Physics* 1, 195–200.
- Bott, R. (1959). The stable homotopy of the classical groups. *Annals of Mathematics* 70, 313–337.
- Brauer, R. y Weyl, H. (1935). Spinors in n dimensions. *American Journal of Mathematics* 57, 425–449.
- Brouwer, L. E. J. (1911). Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl. *Mathematische Annalen* 70, 161–165.
- Cantor, G. (1878). Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 84, 242–258.
- Clauser, J. F., Horne, M. A., Shimony, A. y Holt, R. A. (1969). Proposed experiment to test local hidden-variable theories. *Physical Review Letters* 23, 880–884.
- Denavit, J. y Hartenberg, R. S. (1955). A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices. *Journal of Applied Mechanics* 22, 215–221.
- Dirac, P. A. M. (1928). The quantum theory of the electron. *Proceedings of the Royal Society A* 117, 610–624.
- Eilenberg, S. y Niven, I. (1944). The «fundamental theorem of algebra» for quaternions. *Bulletin of the American Mathematical Society* 50, 246–248.
- Euler, L. (1748). *Introductio in analysin infinitorum*. Lausana: Bousquet.
- Gauss, C. F. (1799). *Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse*. Helmstedt.
- Hamilton, W. R. (1844). On quaternions; or on a new system of imaginaries in algebra. *Philosophical Magazine* 25, 10–13.
- İnönü, E. y Wigner, E. P. (1953). On the contraction of groups and their representations. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 39, 510–524.
- Lawson, H. B. y Michelsohn, M.-L. (1989). *Spin Geometry*. Princeton: Princeton University Press.
- Möbius, A. F. (1827). *Der barycentrische Calcul*. Leipzig: Barth.
- Niven, I. (1941). Equations in quaternions. *American Mathematical Monthly* 48, 654–661.
- Rodrigues, O. (1840). Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 5, 380–440.
- Schmidt, E. (1907). Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I. *Mathematische Annalen* 63, 433–476.
- Tsirelson, B. S. (1980). Quantum generalizations of Bell's inequality. *Letters in Mathematical Physics* 4, 93–100.