

La sombra y el objeto

Proyección dimensional y los límites de la observación

ROY GONZALEZ

Investigador independiente

RESUMEN Este artículo defiende una tesis que llamo *realismo proyectivo*: lo que observamos es, en un sentido preciso, la proyección de un estado que tiene más componentes independientes que las tres dimensiones del espacio y la del tiempo en las que lo observamos, y toda proyección descarta necesariamente información. Sostengo que varios episodios que suelen presentarse como paradojas de la matemática y de la física, entre ellos las raíces «imaginarias» de una ecuación cuadrática, la invisibilidad de la velocidad en una imagen instantánea, la relatividad de la simultaneidad y las correlaciones de partículas entrelazadas, comparten una misma estructura: un rasgo de la proyección se toma por un rasgo del objeto. Enuncio la tesis de manera formal, distingo tres clases de artefactos de proyección y muestro que la historia de la unificación en física, de Maxwell y Minkowski a Kaluza y Klein, es una historia de ampliación del espacio de componentes y no de refinamiento de la observación dentro de un espacio fijo. Respondo después a cuatro objeciones: la del empirismo constructivo, la de la subdeterminación, la de la cosa en sí incognoscible de Kant y la del teorema de Bell. La conclusión es que la alegoría platónica de la caverna, leída geoméricamente, es mejor guía para entender la relación entre observación y realidad que la convicción aristotélica de que la observación cuidadosa basta para el conocimiento, aunque la observación siga siendo necesaria.

PALABRAS CLAVE caverna de Platón; fenómeno y nómeno; realismo estructural; proyección; números imaginarios; entrelazamiento; teoría de Kaluza–Klein; unificación

I. INTRODUCCIÓN

La física y la matemática se han encontrado una y otra vez con objetos que parecen imposibles desde donde estamos y ordinarios desde otro lugar. Un número cuyo cuadrado es negativo, una partícula que parece actuar instantáneamente sobre otra a kilómetros de distancia, un reloj que atrasa solo porque se mueve: cada uno fue recibido primero como un escándalo y absorbido después por la teoría. La absorción tomó casi siempre la misma forma. Se introdujo un espacio mayor, el objeto escandaloso se situó en él y el escándalo resultó ser un efecto de mirar ese espacio desde uno más pequeño.

El propósito de este artículo es hacer explícito ese patrón y preguntar qué nos dice sobre la realidad. Mi tesis es que el patrón no es un accidente de la historia de la ciencia, sino una consecuencia de la relación entre la observación y sus objetos. Observar es proyectar. La observación toma un estado con muchas componentes y devuelve unas pocas, y las que no devuelve no por ello son irreales. Cuando tomamos la proyección por el objeto, el mundo parece paradójico y, en ese sentido y solo en ese sentido, ilusorio.

La tesis tiene un antepasado antiguo. En el libro séptimo de la *República*, Platón describe a unos prisioneros que solo ven sombras en la pared de una caverna y las toman por todo lo que

existe (Platón, *República* VII). Sostendré que la alegoría puede leerse casi literalmente como una afirmación sobre proyecciones, y que así leída es correcta en un sentido en que no lo es la convicción opuesta, asociada con Aristóteles, de que el conocimiento se completa con la acumulación cuidadosa de observaciones. Aristóteles tenía razón en que el conocimiento empieza por los sentidos; según esta lectura, se equivocaba si pensaba que podía terminar en ellos.

La sección 2 lee la caverna geométricamente. La sección 3 presenta cuatro casos. La sección 4 enuncia la tesis. La sección 5 clasifica los artefactos de la proyección. La sección 6 se ocupa de la unificación en física. La sección 7 examina las objeciones, y la sección 8 vuelve a Platón y a Aristóteles.

2. LA CAVERNA, LEÍDA GEOMÉTRICAMENTE

Los prisioneros de Platón están encadenados de modo que solo pueden ver la pared que tienen delante. Detrás de ellos arde un fuego, y entre el fuego y los prisioneros hay personas que transportan objetos cuyas sombras caen sobre la pared (*República* 514a–515c). Los prisioneros ponen nombre a las sombras, registran sus regularidades y honran a quien mejor las predice. Uno de ellos es liberado, vuelto hacia el fuego y conducido por fin a la luz del sol, donde, tras un periodo doloroso de adaptación, ve las cosas como son. Cuando regresa, es peor que los demás en el juego de las sombras, y ellos concluyen que el ascenso lo ha dañado (516e–517a).

Tres rasgos del relato importan aquí. Primero, las sombras no son falsas. Las causan los objetos y varían con ellos según leyes; un prisionero suficientemente aplicado podría construir una ciencia predictiva de las sombras. Segundo, las sombras son más pobres que los objetos. Una sombra es bidimensional y ha perdido la profundidad, el color y la textura; objetos distintos pueden proyectar sombras idénticas, y un mismo objeto, al girar, puede proyectar sombras que parecen cosas distintas. Tercero, la liberación es un cambio de *perspectiva*, no una mejora de la vista. El prisionero no ve mejor la pared; se da la vuelta.

En términos modernos, la sombra es la imagen del objeto bajo una proyección: una aplicación de un espacio de mayor dimensión a otro de menor dimensión que conserva algunas componentes y descarta las demás. Los tres rasgos que acabo de enumerar son entonces teoremas y no metáforas. La imagen está determinada por el objeto (la sombra no es falsa). La aplicación no es inyectiva, de modo que objetos distintos pueden compartir imagen (la sombra es más pobre). Y ningún refinamiento dentro de la imagen recupera lo que la aplicación descartó; para ello hace falta una segunda aplicación, otra proyección o un modelo del espacio del que procede la imagen (la liberación es un cambio de perspectiva).

3. CUATRO CASOS

3.1 *Los números imaginarios*

La ecuación $x^2 + 4 = 0$ no tiene solución real: en la recta real ningún número tiene cuadrado negativo. Los algebristas del Renacimiento calcularon, sin embargo, con raíces cuadradas de números negativos. Cardano, que las encontró en 1545 al dividir diez en dos partes cuyo producto fuese cuarenta, calificó el resultado de «tan sutil como inútil» (Cardano 1545); Descartes llamó *imaginarias* a tales cantidades en 1637 (Descartes 1637), y el nombre ha teñido su recepción

desde entonces.

La solución llegó cuando Wessel, Argand y Gauss representaron los números complejos como puntos de un plano (Wessel 1799; Argand 1806; Gauss 1831). El número i es entonces un paso unitario a lo largo de un segundo eje, perpendicular a la recta real, y multiplicar por i es girar un ángulo recto, de modo que $i^2 = -1$ porque dos cuartos de vuelta miran hacia atrás. Nada en esta imagen es imaginario. La solución de $x^2 + 4 = 0$ está a dos unidades a lo largo del eje perpendicular; vista solo desde la recta real, no está en ninguna parte. Gauss extrajo él mismo la moraleja: si $+1$, -1 y $\sqrt{-1}$ se hubieran llamado unidades directa, inversa y *lateral*, el asunto nunca habría parecido oscuro (Gauss 1831). La apariencia de imposibilidad era un artefacto de buscar la respuesta en un espacio con muy pocas dimensiones.

3.2 La velocidad

Una fotografía de un brazo robótico en movimiento y otra del mismo brazo en reposo, en la misma configuración, son idénticas. La velocidad no aparece en una imagen instantánea. Sin embargo, la velocidad del brazo es tan real como su posición: determina dónde estará. La mecánica clásica lo reconoce desde hace mucho al tratar la posición y la velocidad (o el momento) como coordenadas independientes de un estado en el *espacio de fases*. En el lenguaje de este artículo, la imagen instantánea es una proyección del estado que descarta las componentes de velocidad. Percibimos la velocidad solo indirectamente, por la manera en que difieren proyecciones sucesivas. La rapidez del robot es, en este sentido modesto pero exacto, una dimensión que experimentamos sin verla.

3.3 El espacio y el tiempo

Einstein abrió su artículo de 1905 sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento con una asimetría: un imán que se mueve cerca de un conductor y un conductor que se mueve cerca de un imán producen la misma corriente, pero la teoría de la época describía los dos casos de manera distinta, con un campo eléctrico en uno y una fuerza magnética en el otro (Einstein 1905). Tres años después, Minkowski reformuló la teoría como la geometría de un espacio-tiempo de cuatro dimensiones y declaró que «el espacio por sí mismo y el tiempo por sí mismo están condenados a desvanecerse en meras sombras» (Minkowski 1909). En el espacio-tiempo, los campos eléctrico y magnético son componentes de un único objeto, y la contracción de las varillas en movimiento y la dilatación de los relojes en movimiento son el acortamiento de proyecciones de un intervalo cuatridimensional que no cambia. La palabra *sombras* era de Minkowski, y la eligió con cuidado.

3.4 El entrelazamiento

En 1935 Einstein, Podolsky y Rosen consideraron dos partículas que han interactuado y luego se han separado, y argumentaron que, si la mecánica cuántica es correcta, una medición sobre una permite predecir con certeza un resultado sobre la otra sin perturbarla; o bien la segunda partícula poseía ese valor desde el principio, y la teoría es incompleta, o bien la medición actuó instantáneamente a distancia (Einstein, Podolsky y Rosen 1935). Bohr respondió que la pregunta estaba mal planteada (Bohr 1935). El intercambio continuó en privado durante dos décadas; en 1954 Pauli, escribiendo a Born, comparó la pregunta de Einstein con la antigua cuestión «de cuántos ángeles pueden sentarse en la punta de una aguja» (Born 1971).

Bell mostró en 1964 que la pregunta no era ociosa (Bell 1964). Si cada partícula lleva sus pro-

pías variables ocultas y responde a su propia medición a partir de ellas, las correlaciones obedecen desigualdades que la mecánica cuántica viola; los experimentos, desde los de Aspect, han confirmado la violación, con el máximo rigor en 2015 (Aspect, Dalibard y Roger 1982; Hensen et al. 2015). La lección que suele extraerse es que ninguna teoría de variables ocultas transportadas localmente puede ser correcta. La lección que quiero extraer es complementaria: la descripción de un par entrelazado como *dos* objetos, cada uno con su propio estado, es ella misma una proyección. El estado cuántico de dos partículas no es un par de estados en el espacio tridimensional, sino un único estado sobre un espacio de mayor dimensión, el espacio de configuración de ambas juntas, y en general no puede escribirse como producto de dos estados de una partícula (Schrödinger 1935). Visto en el espacio, el par aparece como dos cosas que cambian juntas a distancia; visto en su propio espacio, es una sola cosa que cambia.

4. LA TESIS PROYECTIVA

Los cuatro casos comparten una estructura, que ahora enuncio.

Definición 4.1. Sea S un conjunto de estados posibles de un sistema y O un conjunto de observaciones posibles. Una *aplicación de observación* es una función $\pi: S \rightarrow O$ que asigna a cada estado lo que un observador de cierto tipo registra de él. La aplicación es una *proyección* si es sobreyectiva y no inyectiva: toda observación lo es de algún estado, y algunos estados distintos se observan de manera idéntica.

Cuando S y O son espacios vectoriales y π es lineal, la falta de inyectividad tiene una medida precisa: el núcleo de π , el conjunto de diferencias entre estados que no producen ninguna diferencia observable, tiene dimensión $\dim S - \dim O$. Cada dirección del núcleo es una manera en que la realidad puede variar mientras la apariencia permanece fija.

REALISMO PROYECTIVO. (i) Los estados de los sistemas físicos son elementos de espacios con más componentes independientes que las cuatro del espacio y el tiempo. (ii) La observación, tal como la realizan criaturas como nosotros e instrumentos contruidos según el mismo modelo, es una proyección de esos estados. (iii) Por tanto, el mundo observado subdetermina sistemáticamente el mundo que se observa, y los rasgos de la proyección tienden a confundirse con rasgos del objeto.

La cláusula (i) es una afirmación ontológica; la (ii), epistemológica; la (iii) se sigue de ambas por la definición de proyección. La distinción kantiana entre el *fenómeno*, el objeto tal como aparece, y el *noumeno*, el objeto tal como es en sí mismo (Kant 1781/1787), se corresponde con la distinción entre la imagen $\pi(s)$ y el estado s . Pero el realismo proyectivo se aparta de Kant en un aspecto importante, al que vuelvo en la sección 7: las componentes que π descarta no son incognoscibles en principio. Se conocen como el prisionero liberado conoce la profundidad de los objetos: cambiando de perspectiva y reconstruyendo.

El realismo proyectivo tiene un pariente cercano en la metafísica contemporánea de la mecánica cuántica. El *realismo de la función de onda* sostiene que el escenario fundamental de un mundo cuántico de N partículas es un espacio de $3N$ dimensiones, y que el mundo tridimensional de la experiencia es derivado (Albert 1996; Ney 2021). La presente tesis es más general y más modesta: más general, porque se aplica por igual a la cinemática clásica y al álgebra de los números;

más modesta, porque no dice qué espacio de mayor dimensión es el fundamental, sino solo que el nuestro es una proyección de alguno.

5. TRES ARTEFACTOS DE LA PROYECCIÓN

Si la tesis es correcta, ciertas clases de apariencia deberían surgir dondequiera que un estado se observe a través de una proyección. Conviene distinguir tres, porque cada una ha sido tomada, en algún momento, por un hecho del mundo.

Creación y aniquilación. Considérese una varilla de longitud unidad en un espacio con una dirección oculta al observador, y hágasela girar uniformemente en un plano que contenga esa dirección. Su longitud no cambia nunca. Su sombra, en cambio, tiene longitud $|\cos \theta|$: se encoge, desaparece cuando la varilla es perpendicular al espacio visible y reaparece apuntando en sentido contrario. Un observador confinado a la sombra describiría la destrucción de una varilla y la creación de su gemela invertida. Abbott dramatizó exactamente esto en 1884: una esfera que atraviesa un mundo bidimensional aparece ante sus habitantes como un punto que se vuelve un círculo, crece, mengua y se desvanece (Abbott 1884).

Inversión. Prolónguese el mismo giro hasta media vuelta y aplíquese a un objeto tridimensional entero. Visto a través de la proyección, el objeto se ha convertido en su imagen especular, una mano izquierda se ha convertido en una derecha, y ningún movimiento dentro de tres dimensiones podría haberlo logrado. Kant hizo de las contrapartes incongruentes, como la mano izquierda y la derecha, un argumento sobre la naturaleza del espacio (Kant 1768); Möbius observó en 1827 que un giro a través de una cuarta dimensión llevaría una en la otra (Möbius 1827).

Acción a distancia. Supóngase que un único estado tiene dos grupos de componentes que se observan en dos lugares distintos, y que una tercera componente los acopla. Un cambio en la componente de acoplamiento altera ambos grupos en el mismo paso. Observado a través de dos proyecciones, cada una de las cuales ve solo un grupo, esto aparece como una correlación instantánea entre dos cosas separadas. Es la estructura de la sección 3.4.

Un cuarto artefacto conocido merece una observación, aunque sea cuestión de sistema de referencia y no de dimensión. La fuerza de Coriolis, que desvía los vientos y los proyectiles sobre la Tierra en rotación (Coriolis 1835), es real en el sentido de que debe incluirse en todo cálculo correcto hecho en el sistema que gira; y sin embargo, vista desde un sistema inercial, ninguna fuerza así actúa. También aquí un rasgo de un punto de vista se experimenta como un rasgo del mundo. La lección se generaliza: lo que se observa depende de cómo se observa, y esa dependencia puede disfrazarse de fuerza, de creación, de inversión o de influencia.

6. LA UNIFICACIÓN COMO PROBLEMA DE PERSPECTIVA

La física tiene la ambición permanente de unificar: de mostrar que fenómenos tratados por teorías separadas son aspectos de uno solo. Es instructivo preguntar cómo se lograron sus unificaciones pasadas.

Fecha	Qué se unificó	Mediante qué ampliación
1865	electricidad, magnetismo, luz	un campo con más componentes (Maxwell 1865)
1905–1908	espacio y tiempo; campos eléctrico y magnético	una cuarta dimensión (Einstein 1905; Minkowski 1909)
1921–1926	gravitación y electromagnetismo (clásicamente)	una quinta dimensión (Kaluza 1921; Klein 1926)
1961–1968	interacciones electromagnética y débil	componentes internas de cada campo (Glashow 1961; Weinberg 1967)
1995	las teorías de cuerdas conocidas	una undécima dimensión (Witten 1995)

El resultado de Kaluza es el caso más claro. Al escribir las ecuaciones de campo de Einstein en cinco dimensiones en lugar de cuatro, encontró que las componentes adicionales de la métrica reproducen las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo, junto con un campo escalar adicional (Kaluza 1921). Klein mostró después que, si la quinta dimensión es un círculo pequeño, la carga eléctrica corresponde al momento a lo largo de ella (Klein 1926). Una magnitud que en cuatro dimensiones parece fundamental e irreducible es, en cinco, la proyección de un movimiento.

El patrón invita a una hipótesis, que enuncio como hipótesis y no como resultado: *los fracasos que quedan en la unificación, sobre todo el fracaso en conciliar la gravitación con la teoría cuántica, pueden ser fracasos de perspectiva más que de física*. Puede que estemos intentando encajar en cuatro dimensiones un estado que, como las raíces de $x^2 + 4 = 0$, la velocidad del robot y el par entrelazado, no cabe en ellas. La hipótesis tiene consecuencias. Recomienda buscar la unificación ampliando el espacio de componentes y buscando la proyección que produce las teorías observadas, en lugar de refinar más dentro del espacio observado. Es, desde luego, una heurística, y las heurísticas pueden fallar; la proliferación de teorías candidatas de mayor dimensión muestra que ampliar el espacio no basta. Pero ha sido la heurística correcta en cada paso decisivo hasta ahora.

7. OBJECIONES Y RESPUESTAS

7.1 La objeción empirista

Un empirista constructivo dirá que la ciencia aspira solo a la adecuación empírica, y que creer en componentes inobservables es un añadido opcional (van Fraassen 1980). Según esta posición, las componentes descartadas son ociosas: si no producen ninguna diferencia observable, no hay nada sobre lo que acertar o errar.

La respuesta es que las componentes descartadas no son ociosas: son lo que hace coherentes a las proyecciones. La velocidad del robot no es visible en ninguna fotografía, pero explica la relación entre fotografías sucesivas. Las componentes ocultas de la ecuación de Dirac no se observaron en 1928, pero implicaban el positrón, observado en 1932 (Dirac 1928; Anderson 1933). Una componente es descartada por una proyección, no por todas; su postulación se pone a prueba en las demás. El empirista tiene razón en que no tenemos acceso a la realidad salvo a través de proyecciones. Se equivoca al concluir que las proyecciones son todo aquello sobre lo que se puede acertar.

7.2 La objeción de la subdeterminación

Dado un conjunto de observaciones, infinitos estados de mayor dimensión se proyectan sobre ellas. ¿Cómo podemos entonces pretender conocer uno en particular? La objeción es correcta hasta donde llega, y la tesis la concede: una sola proyección subdetermina el estado. Pero la subdeterminación se reduce multiplicando proyecciones independientes, como una segunda fuente de luz fija la altura de una pelota que su sombra sola no fija, y exigiendo que la teoría elevada sea más simple que la proyectada: lineal donde las observaciones no lo eran, de primer orden donde eran de segundo. Las elevaciones que la historia ha confirmado tenían exactamente esta propiedad.

7.3 La objeción kantiana

Kant sostuvo que la cosa en sí es incognoscible: conocemos los objetos solo tal como aparecen bajo las formas de nuestra sensibilidad (Kant 1781/1787). ¿No es el realismo proyectivo simplemente Kant reformulado?

No lo es, porque la tesis afirma que las componentes nouménicas son cognoscibles *en su estructura*. El prisionero liberado no percibe los objetos con alguna facultad nueva; los reconstruye a partir de sus relaciones. Los realistas estructurales han argumentado que lo que las teorías exitosas conservan a través de las revoluciones es precisamente esa estructura (Worrall 1989; Ladyman 1998). El realismo proyectivo es un realismo estructural acerca del espacio de componentes: conocemos la dimensión del espacio oculto, las aplicaciones entre sus proyecciones y las leyes que rigen en él, aun cuando no percibamos sus elementos.

7.4 La objeción del teorema de Bell

Por último, puede objetarse que describir el par entrelazado como un solo objeto en un espacio de mayor dimensión es reintroducir variables ocultas, que el teorema de Bell habría refutado. La objeción confunde dos tesis. El teorema de Bell refuta las variables ocultas que cada partícula transporta por separado y que actúan localmente (Bell 1964). No dice nada contra una descripción en la que las variables relevantes pertenecen al par como un todo; de hecho, el propio Bell consideraba la teoría de Bohm de 1952, en la que así ocurre, una posibilidad seria (Bohm 1952; Bell 1987). El precio de tal descripción es bien conocido: en términos tridimensionales es no local, y conciliarla con la relatividad exige cuidado. El realismo proyectivo no elimina ese precio. Lo reinterpreta: lo que es no local en la proyección puede ser local, o sencillamente unitario, en el espacio del que se toma la proyección.

8. PLATÓN Y ARISTÓTELES

Es habitual contraponer a Platón, para quien el mundo sensible es una imagen del inteligible, con Aristóteles, para quien el conocimiento de los universales surge por inducción a partir de la percepción (Aristóteles, *Analíticos segundos* II.19). Suele decirse que la ciencia moderna siguió a Aristóteles, y en su método lo ha hecho: parte de la observación y vuelve a ella. Pero los casos de este artículo sugieren que, en la cuestión de qué *revela* la observación, Platón vio más lejos. El plano complejo, el espacio de fases de la mecánica, el espacio-tiempo de Minkowski y el espacio de configuración de la mecánica cuántica no son observados. Cada uno se introdujo para dar sentido a observaciones que, tomadas al pie de la letra, eran paradójicas.

La posición correcta no es, por tanto, la de Aristóteles ni, en todos sus detalles, la de Platón. La observación es necesaria: sin la sombra, el prisionero no tendría nada que reconstruir. No es suficiente: la sombra es la imagen de un objeto más rico que ella, y conocer el objeto es reconstruir lo que la imagen descarta. El instrumento de la reconstrucción es la matemática, que, desde este punto de vista, es el arte de situar una cosa en un espacio de componentes ortogonales y de encontrar las componentes en las que su comportamiento es más simple.

9. CONCLUSIÓN

He sostenido que la observación es una proyección, que las proyecciones descartan información y que las paradojas que han jalonado la historia de la matemática y de la física son, en una familia característica de casos, el resultado de tomar la proyección por el objeto. Los números imaginarios son giros reales vistos desde una recta; la velocidad es una componente invisible para una imagen instantánea; la contracción de las varillas en movimiento es el acortamiento de una proyección; y dos partículas entrelazadas pueden ser un solo objeto visto dos veces. El mismo patrón rige la historia de la unificación, que ha avanzado ampliando el espacio de componentes.

Si esto es correcto, la realidad no es tridimensional ni cuatridimensional; es un estado con más componentes de las que podemos percibir, y el mundo de la experiencia es su proyección. Ese mundo no es falso, pero es incompleto, y se vuelve una ilusión precisamente cuando lo tomamos por el todo. Los prisioneros de Platón no fueron engañados por las sombras. Los engañó la creencia de que no había nada detrás de ellas.

REFERENCIAS

- Abbott, E. A. (1884). *Flatland: A Romance of Many Dimensions*. Londres: Seeley.
- Albert, D. Z. (1996). Elementary quantum metaphysics. En J. T. Cushing, A. Fine y S. Goldstein (eds.), *Bohmian Mechanics and Quantum Theory: An Appraisal*, 277–284. Dordrecht: Kluwer.
- Anderson, C. D. (1933). The positive electron. *Physical Review* 43, 491–494.
- Argand, J.-R. (1806). *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*. París.
- Aristóteles. *Analíticos segundos*, II.19. Trad. inglesa de J. Barnes (2.^a ed.). Oxford: Clarendon Press, 1994.
- Aspect, A., Dalibard, J. y Roger, G. (1982). Experimental test of Bell's inequalities using time-varying analyzers. *Physical Review Letters* 49, 1804–1807.
- Bell, J. S. (1964). On the Einstein Podolsky Rosen paradox. *Physics* 1, 195–200.
- Bell, J. S. (1987). *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Bohm, D. (1952). A suggested interpretation of the quantum theory in terms of «hidden» variables, I y II. *Physical Review* 85, 166–193.
- Bohr, N. (1935). Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical Review* 48, 696–702.
- Born, M. (ed.) (1971). *The Born–Einstein Letters*. Londres: Macmillan.
- Cardano, G. (1545). *Ars Magna*. Núremberg.
- Coriolis, G.-G. de (1835). Sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps. *Journal de l'École polytechnique* 15, 142–154.

- Descartes, R. (1637). *La Géométrie*. Leiden.
- Dirac, P. A. M. (1928). The quantum theory of the electron. *Proceedings of the Royal Society A* 117, 610–624.
- Einstein, A. (1905). Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Annalen der Physik* 17, 891–921.
- Einstein, A., Podolsky, B. y Rosen, N. (1935). Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical Review* 47, 777–780.
- Gauss, C. F. (1831). Anzeige: Theoria residuorum biquadraticorum, commentatio secunda. *Göttingische gelehrte Anzeigen*, 625–638.
- Glashow, S. L. (1961). Partial-symmetries of weak interactions. *Nuclear Physics* 22, 579–588.
- Hensen, B. et al. (2015). Loophole-free Bell inequality violation using electron spins separated by 1.3 kilometres. *Nature* 526, 682–686.
- Kaluza, T. (1921). Zum Unitätsproblem der Physik. *Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften*, 966–972.
- Kant, I. (1768). Von dem ersten Grunde des Unterschiedes der Gegenden im Raume. Königsberg.
- Kant, I. (1781/1787). *Crítica de la razón pura*. Trad. inglesa de P. Guyer y A. W. Wood. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.
- Klein, O. (1926). Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie. *Zeitschrift für Physik* 37, 895–906.
- Ladyman, J. (1998). What is structural realism? *Studies in History and Philosophy of Science* 29, 409–424.
- Maxwell, J. C. (1865). A dynamical theory of the electromagnetic field. *Philosophical Transactions of the Royal Society* 155, 459–512.
- Minkowski, H. (1909). Raum und Zeit. *Physikalische Zeitschrift* 10, 104–111.
- Möbius, A. F. (1827). *Der barycentrische Calcul*. Leipzig: Barth.
- Ney, A. (2021). *The World in the Wave Function: A Metaphysics for Quantum Physics*. Nueva York: Oxford University Press.
- Platón. *República*. Trad. inglesa de G. M. A. Grube, rev. C. D. C. Reeve. Indianápolis: Hackett, 1992.
- Schrödinger, E. (1935). Discussion of probability relations between separated systems. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 31, 555–563.
- van Fraassen, B. C. (1980). *The Scientific Image*. Oxford: Clarendon Press.
- Weinberg, S. (1967). A model of leptons. *Physical Review Letters* 19, 1264–1266.
- Wessel, C. (1799). Om directionens analytiske betegning. *Nye Samling af det Kongelige Danske Videnskabskabernes Selskabs Skrifter* 5, 469–518.
- Witten, E. (1995). String theory dynamics in various dimensions. *Nuclear Physics B* 443, 85–126.
- Worrall, J. (1989). Structural realism: the best of both worlds? *Dialectica* 43, 99–124.