

Componentes ocultas

Proyección, dimensiones adicionales y entrelazamiento en la descripción física

ROY GONZALEZ

Investigador independiente

RESUMEN Los estados físicos tienen en general más componentes independientes de las que puede mostrar una observación en el espacio tridimensional en un instante. Desarrollamos sistemáticamente esta constatación como principio de trabajo: las magnitudes observadas de un sistema son una proyección de un estado en un espacio mayor de componentes, y las anomalías aparentes en las magnitudes observadas señalan a menudo componentes que la proyección ha descartado. Ilustramos el principio en cuatro niveles. En cinemática, la velocidad de un manipulador es invisible en cualquier configuración aislada y aparece, en una descripción homogénea de cinco dimensiones, como una cizalla generada por el eje temporal; en relatividad especial, la misma velocidad es una rotación hiperbólica. En la teoría de Dirac, la exigencia de una ecuación de primer orden impone componentes espinoriales que no se observaron en 1928 y cuyas consecuencias, el espín y el positrón, sí se observaron. En la teoría de Kaluza–Klein, una quinta dimensión convierte la carga eléctrica en momento y un único campo en una torre de masas, hoy acotada por experimentos de colisionadores y de balanza de torsión. Para pares entrelazados, la desigualdad de Bell–CHSH excluye las descripciones mediante dos conjuntos de variables transportados por separado; damos un modelo real explícito de doce componentes, un estado observado a través de dos proyecciones, en el que las correlaciones surgen de un único acoplamiento que actúa en un paso, y exponemos sus costes. Concluimos observando que las unificaciones históricas de la física se lograron ampliando el espacio de componentes, y discutimos qué haría falta para convertir este patrón en un programa contrastable.

PALABRAS CLAVE coordenadas homogéneas; transformaciones de Galileo y de Lorentz; ecuación de Dirac; teoría de Kaluza–Klein; dimensiones adicionales; entrelazamiento; desigualdades de Bell; no separabilidad; unificación

I. INTRODUCCIÓN

Una imagen instantánea de un sistema físico registra posiciones. No registra velocidades, espines, fases, números cuánticos internos ni las correlaciones entre partes separadas; todo ello debe inferirse de secuencias de imágenes o de la estadística de muchas. En este sentido limitado pero exacto, toda observación es una proyección del estado sobre un subespacio de lo que el estado contiene.

Este artículo toma ese hecho como principio de trabajo y lo sigue a través de varios niveles de la teoría física. El principio no es nuevo en ninguno de sus casos. El espacio de fases trata la velocidad como coordenada independiente (Gibbs 1902); el espacio-tiempo de Minkowski une el espacio y el tiempo (Minkowski 1909); la ecuación de Dirac requiere más componentes que la función de onda de Schrödinger (Dirac 1928); Kaluza y Klein añadieron una quinta dimensión (Kaluza 1921; Klein 1926). Lo que queremos subrayar es la estructura común y, en particular, una heurística que se sigue de ella: cuando las magnitudes observadas se comportan de modo

anómalo, siendo no lineales donde se espera linealidad, de segundo orden donde se espera primer orden, o correlacionadas con separación de tipo espacio, conviene preguntarse qué componentes ha descartado la observación.

Usamos unidades naturales ($\hbar = c = 1$) salvo indicación contraria. Todos los valores numéricos se calcularon en doble precisión.

2. CINEMÁTICA: LA VELOCIDAD COMO COMPONENTE OCULTA

2.1 Coordenadas homogéneas

Los movimientos rígidos de $\mathbb{R}^3$ no son lineales, porque las traslaciones no lo son. En coordenadas homogéneas (x, w) , $w = 1$, una traslación por d se convierte en la cizalla $x \mapsto x + dw$, y todo movimiento rígido es una matriz 4×4 $\begin{pmatrix} R & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Los manipuladores seriales se describen como productos de tales matrices, una por articulación (Denavit y Hartenberg 1955). La cuarta coordenada nunca se observa, puesto que $w = 1$ idénticamente, pero toda traslación del brazo se escribe a través de ella.

2.2 Una quinta coordenada para la velocidad

Añádase el tiempo como coordenada y escríbase un suceso como (x, w, t) . Un cuerpo que se mueve con velocidad v es transportado por la matriz

$$D_v = \begin{pmatrix} I & 0 & v \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp \left(\sum_i v_i E_{i,t} \right), \quad x \mapsto x + vt, \quad (2.1)$$

una cizalla generada por el eje temporal. Las matrices $\begin{pmatrix} R & d & v \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ forman una representación fiel del grupo de Galileo, con ley de composición $v = v_1 + R_1 v_2$. En esta descripción, la columna w lleva dónde está un cuerpo y la columna t lleva cómo se mueve.

2.3 Un ejemplo

Considérese un brazo de tres articulaciones (guiñada de la base q_0 , cabeceo del hombro q_1 , cabeceo del codo q_2) con eslabones $l_1 = 0.5$ m y $l_2 = 0.4$ m, en $(q_0, q_1, q_2) = (30^\circ, 20^\circ, 50^\circ)$. Su mano está en

$$(x, y, z) = (0.52538, 0.30333, 0.54689) \text{ m.}$$

Tres movimientos a partir de esta configuración dan las velocidades de la mano de la tabla 1.

Velocidades articulares, grados/s	Velocidad de la mano, m/s	Rapidez, m/s
(0, 10, -10)	(-0.02585, -0.01492, 0.08200)	0.08727
(0, 90, -90)	(-0.23263, -0.13431, 0.73803)	0.78540
(60, 0, 0)	(-0.31764, 0.55017, 0)	0.63529

Tabla 1: Velocidades de la mano de un brazo de tres articulaciones desde una misma configuración. Los tres movimientos dan la misma imagen instantánea.

Los tres movimientos comparten la misma imagen instantánea. Transportadas por (2.1) durante 0.2 s, las imágenes de los dos primeros se separan: (0.52021, 0.30034, 0.56329) y (0.47885, 0.27646, 0.69449). Las posiciones reales de la mano tras 0.2 s de movimiento articular son (0.51996, 0.30020, 0.56318) y (0.45970, 0.26541, 0.68371); la deriva es la tangente a la trayectoria real. La propia configuración también queda subdeterminada por la imagen: la misma mano se alcanza con el hombro en 64.06809° y el codo en -50° . Para un brazo industrial de seis articulaciones rotativas, el estado tiene seis ángulos y seis velocidades, doce componentes, de las que una imagen de la mano registra tres.

2.4 La forma relativista

En relatividad especial la misma velocidad es una rotación. Con $K = E_{x,t} + E_{t,x}$ se tiene $K^3 = K$, y

$$\Lambda(\varphi) = e^{\varphi K} = I + \sinh \varphi K + (\cosh \varphi - 1)K^2, \quad v = \tanh \varphi, \quad (2.2)$$

la contrapartida hiperbólica de la fórmula de rotación de Rodrigues. Cuando $c \rightarrow \infty$ la transformación se contrae a la cizalla (2.1) (İnönü y Wigner 1953). Para el movimiento más rápido de la tabla 1, $v = 0.78540$ m/s, la rapidez es $\varphi = 2.6 \times 10^{-9}$: la línea de universo de la mano está inclinada hacia el espacio en ese ángulo. Einstein motivó la teoría con una asimetría, la del imán y el conductor que producen una misma corriente pero se describían con dos mecanismos (Einstein 1905); la geometría de Minkowski la eliminó al hacer de los campos eléctrico y magnético componentes de un solo tensor, y llamó al espacio y al tiempo por sí solos «meras sombras» (Minkowski 1909).

3. LAS COMPONENTES OCULTAS DEL ELECTRÓN

3.1 Una ecuación de primer orden necesita más componentes

La relación relativista de energía $E^2 = p^2 + m^2$ da la ecuación de Klein–Gordon $(\square + m^2)\psi = 0$, de segundo orden en el tiempo y con una componente. Dirac buscó un operador de primer orden cuyo cuadrado fuera este (Dirac 1928). Escribiendo $P = i\gamma^\mu \partial_\mu$, la condición $(P + m)(P - m) = -(\square + m^2)$ se cumple si y solo si los coeficientes satisfacen

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\gamma^{\mu\nu} I, \quad (3.1)$$

y en $3 + 1$ dimensiones las matrices más pequeñas con esta propiedad son de 4×4 . Más en general, en d dimensiones las relaciones de Clifford se realizan con matrices de tamaño $2^{\lfloor d/2 \rfloor}$, construidas recursivamente mediante $\gamma_a^{(n+2)} = X \otimes \gamma_a^{(n)}$, $\gamma_{n+1}^{(n+2)} = Y \otimes I$, $\gamma_{n+2}^{(n+2)} = Z \otimes I$ a partir de las matrices de Pauli (Brauer y Weyl 1935). El precio de reducir el orden de la ecuación es la introducción de nuevas componentes.

3.2 Qué resultaron ser las componentes

Las cuatro componentes del espinor de Dirac llevan el espín, con razón giromagnética $g = 2$, y una segunda rama de soluciones que Dirac acabó interpretando como una antipartícula; Anderson observó el positrón en 1932 (Anderson 1933). Las componentes no son igualmente visibles. Para el estado fundamental del hidrógeno, con $\gamma = \sqrt{1 - \alpha^2} = 0.9999733$, las componentes «grandes» llevan una fracción $(1 + \gamma)/2 = 99.9987\%$ de la probabilidad y las «pequeñas»

$(1 - \gamma)/2 = 0.0013 \%$. Una medición no relativista ve esencialmente un espinor de dos componentes; las demás componentes están ahí, y dan cuenta de la estructura fina del espectro.

4. UNA QUINTA DIMENSIÓN

4.1 *Kaluza y Klein*

En 1921 Kaluza escribió la relatividad general en cinco dimensiones y encontró que, bajo una condición de cilindro, las componentes adicionales de la métrica obedecen las ecuaciones de Maxwell, con un campo escalar adicional (Kaluza 1921). En 1926 Klein propuso que la quinta dimensión es una circunferencia de radio pequeño R y relacionó la carga eléctrica con el momento a lo largo de ella (Klein 1926). El mismo mecanismo actúa sobre los campos de materia. Si ψ satisface la ecuación de Klein–Gordon en cinco dimensiones y $\psi = e^{inx_5/R} g(x^\mu)$, entonces

$$\left(\square_4 + m^2 + \frac{n^2}{R^2}\right)g = 0, \quad m_n = \sqrt{m^2 + n^2/R^2}, \quad (4.1)$$

de modo que un único campo pentadimensional aparece en cuatro dimensiones como una torre de partículas cuyas masas registran su momento en la dirección oculta. Por el resultado de la sección 3, toda solución de la ecuación de Dirac pentadimensional resuelve también (4.1).

4.2 *Situación experimental*

No se ha observado ningún compañero de Kaluza–Klein de partícula alguna del Modelo Estándar. En los modelos con dimensiones adicionales universales (Appelquist, Cheng y Dobrescu 2001), las búsquedas en el Gran Colisionador de Hadrones a $\sqrt{s} = 8$ TeV excluyen escalas de compactificación $1/R$ por debajo de unos 950 GeV para cortes grandes (Colaboración ATLAS 2015), es decir, $R \lesssim 2 \times 10^{-19}$ m. Las dimensiones accesibles solo a la gravedad están acotadas por pruebas de balanza de torsión de la ley del inverso del cuadrado, que no encuentran desviación hasta $52 \mu\text{m}$ (Lee et al. 2020). Si existen dimensiones adicionales, o son muy pequeñas o no las sienten los campos que observamos directamente.

5. ENTRELAZAMIENTO

5.1 *La pregunta*

Einstein, Podolsky y Rosen argumentaron que la mecánica cuántica, si predice con certeza el resultado de una medición sobre una partícula lejana sin perturbarla, ha de ser incompleta (Einstein, Podolsky y Rosen 1935); Bohr discutió la premisa (Bohr 1935). Schrödinger introdujo el término entrelazamiento para los estados en cuestión y observó que no pueden escribirse como productos de estados de las partes (Schrödinger 1935). La expresión posterior de Einstein para el dilema, «acción fantasmal a distancia», procede de una carta a Born de 1947, y la respuesta de Copenhague la tipifica la observación de Pauli a Born en 1954 de que tales preguntas se parecen al problema de cuántos ángeles caben en la punta de una aguja (Born 1971).

5.2 El teorema de Bell y sus pruebas

Supóngase que cada una de dos estaciones separadas mide un observable dicotómico según un ángulo, a en A y b en B , y sea $E(a, b)$ el producto medio de los resultados. Si cada resultado es función del ajuste local y de una variable λ compartida en la fuente, entonces

$$|S| = |E(a, b) - E(a, b') + E(a', b) + E(a', b')| \leq 2 \quad (5.1)$$

(Bell 1964; Clauser, Horne, Shimony y Holt 1969). Para el singlete de espín la mecánica cuántica predice $E(a, b) = -\cos(a - b)$ y $|S| = 2\sqrt{2}$ en $a = 0$, $a' = 90^\circ$, $b = 45^\circ$, $b' = 135^\circ$, el máximo que permite la teoría (Tsirelson 1980). Un modelo en que cada partícula lleva su propia copia de λ , con $A = \text{sgn} \cos(a - \lambda)$ y $B = -\text{sgn} \cos(b - \lambda)$, da las correlaciones de la tabla 2 y satura la cota en $|S| = 2$. Los experimentos han establecido la violación de (5.1) desde Aspect, Dalibard y Roger 1982, y sin las principales lagunas desde 2015 (Hensen et al. 2015; Giustina et al. 2015; Shalm et al. 2015).

$a - b$	0°	45°	90°	135°	180°
dos variables transportadas por separado	-1	-0.5	0	0.5	1
mecánica cuántica y experimento	-1	-0.7071	0	0.7071	1

Tabla 2: Correlación $E(a, b)$ en función del ángulo entre los ajustes.

Lo que el teorema excluye es precisamente la descripción mediante dos objetos, cada uno con sus propias variables. No excluye variables que pertenezcan al par como un todo; la teoría de de Broglie-Bohm es un ejemplo explícito (Bohm 1952), y Bell la consideraba así (Bell 1987). En la imagen de Schrödinger, el estado de dos partículas es una función sobre un espacio de configuración de seis dimensiones, no un par de funciones sobre el espacio tridimensional, y en la filosofía de la física se ha defendido la tesis de que ese espacio de mayor dimensión es el escenario físico (Albert 1996).

5.3 Un modelo real: un estado, dos proyecciones

Para hacer explícita la estructura damos un modelo finito que solo usa vectores y matrices reales. El estado del par es un único vector de $\mathbb{R}^{12}$,

$$s = (x_1, y_1, z_1, t_1, x_2, y_2, z_2, t_2, o, e_1, e_2, r), \quad (5.2)$$

donde $(x_1, \dots, t_1)$ y $(x_2, \dots, t_2)$ son los lugares e instantes en que el estado se observa como partícula A y como partícula B , $o \in \{0, 1\}$ registra la observación, e_1, e_2 son los resultados mostrados y $r = \pm 1$ es una componente aleatoria fijada en la fuente. Los dos observadores ven las proyecciones coordenadas P_A , sobre $(x_1, y_1, z_1, t_1, e_1)$, y P_B , sobre $(x_2, y_2, z_2, t_2, e_2)$; cada una descarta siete de las doce componentes. La dinámica consta de tres matrices reales:

- la separación, $S_u = I - uE_{x_1, t_1} + uE_{x_2, t_2}$, que solo mueve x_1 y x_2 y deja inalterados o, e_1, e_2 y r ;
- la observación, que pone $o = 1$;
- el acoplamiento, $C = I + oN$ con $N = E_{e_1, r} - E_{e_2, r}$, $N^2 = 0$, de modo que $C = e^{oN}$.

La tabla 3 sigue un estado con $r = +1$, separado a $u = 1000$ m/s durante 5 s.

Paso	x_1	t_1	x_2	t_2	o	e_1	e_2	r
preparado	0	5	0	5	0	0	0	1
separado	-5000	5	5000	5	0	0	0	1
observado	-5000	5	5000	5	1	0	0	1
acoplado	-5000	5	5000	5	1	1	-1	1

Tabla 3: Un estado de $\mathbb{R}^{12}$ a través de la separación, la observación y el acoplamiento ($\gamma_i = z_i = 0$ en todo momento).

Tras el acoplamiento, $P_A s = (-5000, 0, 0, 5, 1)$ y $P_B s = (5000, 0, 0, 5, -1)$: a diez kilómetros de distancia, resultados opuestos, fijados por una sola matriz en un paso. Para $r = -1$ los resultados se invierten. Aplicado antes de la observación ($o = 0$), el acoplamiento es la identidad.

Con ángulos de medida basta una componente más, $\mu \in [0, 1]$: sea $e_1 = r$, y $e_2 = -r$ si $\mu < \cos^2 \frac{a-b}{2}$, $e_2 = r$ en otro caso. Promediando en r y μ se obtiene $E(a, b) = -\cos(a - b)$ y, por tanto, $|S| = 2\sqrt{2}$. El modelo elude (5.1) porque e_2 depende de a . La ley marginal de e_2 no depende de a , de modo que ninguna señal pasa de A a B .

5.4 Costes y estatus

El modelo no se ofrece como una nueva teoría física, y no hace ninguna predicción que difiera de la mecánica cuántica. Su propósito es exhibir, en los términos más simples, la estructura que el teorema de Bell permite: correlaciones producidas por un único estado que actúa en un paso en su propio espacio, y que aparecen como acción a distancia solo en las dos proyecciones. Sus costes son los de toda explicación de este tipo. En términos tridimensionales es no local, y el orden en que actúa el acoplamiento presupone una noción de simultaneidad para las dos observaciones; una formulación relativista tendría que proporcionarla o mostrar que es inobservable, como hace la teoría de de Broglie-Bohm en el nivel de las predicciones. No afirmamos haber pagado esos costes; afirmamos solo que el lenguaje de la proyección deja claro dónde están.

6. LA UNIFICACIÓN Y EL ESPACIO DE COMPONENTES

Las unificaciones de la física pueden leerse como ampliaciones sucesivas del espacio de componentes.

Paso	Qué se unificó	Ampliación
Maxwell 1865	electricidad, magnetismo, óptica	un campo con seis componentes
Minkowski 1909	espacio y tiempo; $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$	una cuarta dimensión; un tensor antisimétrico
Dirac 1928	la relatividad y el electrón cuántico	cuatro componentes espinoriales
Kaluza 1921; Klein 1926	gravitación y electromagnetismo	una quinta dimensión
Glashow 1961; Weinberg 1967	fuerzas electromagnética y débil	componentes internas de cada campo
Witten 1995	las cinco teorías de cuerdas	una undécima dimensión

Tabla 4: La unificación como ampliación.

La unificación de la gravitación con la teoría cuántica no se ha logrado. El patrón de la tabla 4 sugiere, sin probarlo, que el obstáculo puede estar en el espacio de componentes y no en la dinámica: que quizá describimos en cuatro dimensiones un estado que no cabe en ellas, como las raíces de $x^2 + 4 = 0$ no caben en la recta real. Para que esta sugerencia se convierta en física ha de hacerse contrastable. Como mínimo, una propuesta de este tipo debería especificar el espacio mayor, la proyección sobre las magnitudes observadas y al menos una consecuencia que difiera de la descripción cuatridimensional, como hace la torre de Kaluza–Klein (4.1). Las cotas existentes (sección 4.2) ya excluyen una amplia clase de tales propuestas, lo que es un argumento a favor de la contrastabilidad del programa y no en su contra.

7. CONCLUSIÓN

En la cinemática, la relatividad, el electrón, las dimensiones adicionales y el entrelazamiento se repite la misma estructura: el estado tiene más componentes que la observación, la observación es una proyección, y las anomalías de la proyección señalan las componentes que ha descartado. La velocidad es invisible en una imagen y es una columna de una matriz de cinco dimensiones; la ecuación de primer orden del electrón exige componentes que resultaron ser el espín y la antimateria; una quinta dimensión convierte la carga en momento y un campo en muchas masas; y un par entrelazado, descrito como dos objetos, viola una cota que un único estado observado dos veces no tiene por qué cumplir. La física ha progresado una y otra vez ampliando el espacio en el que describe el mundo. No hay razón para pensar que las cuatro dimensiones en las que observamos sean el último de esos espacios.

REFERENCIAS

- Albert, D. Z. (1996). Elementary quantum metaphysics. En J. T. Cushing, A. Fine y S. Goldstein (eds.), *Bohmian Mechanics and Quantum Theory: An Appraisal*, 277–284. Dordrecht: Kluwer.
- Anderson, C. D. (1933). The positive electron. *Physical Review* 43, 491–494.
- Appelquist, T., Cheng, H.-C. y Dobrescu, B. A. (2001). Bounds on universal extra dimensions. *Physical Review D* 64, 035002.
- Aspect, A., Dalibard, J. y Roger, G. (1982). Experimental test of Bell's inequalities using time-varying analyzers. *Physical Review Letters* 49, 1804–1807.
- Bell, J. S. (1964). On the Einstein Podolsky Rosen paradox. *Physics* 1, 195–200.
- Bell, J. S. (1987). *Speakable and Unsayable in Quantum Mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Bohm, D. (1952). A suggested interpretation of the quantum theory in terms of «hidden» variables, I y II. *Physical Review* 85, 166–193.
- Bohr, N. (1935). Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical Review* 48, 696–702.
- Born, M. (ed.) (1971). *The Born–Einstein Letters*. Londres: Macmillan.
- Brauer, R. y Weyl, H. (1935). Spinors in n dimensions. *American Journal of Mathematics* 57, 425–449.
- Clauser, J. F., Horne, M. A., Shimony, A. y Holt, R. A. (1969). Proposed experiment to test local hidden-variable theories. *Physical Review Letters* 23, 880–884.
- Colaboración ATLAS (2015). Summary of the searches for squarks and gluinos using $\sqrt{s} = 8$ TeV

- pp collisions with the ATLAS experiment at the LHC. *Journal of High Energy Physics* 10, 054. arXiv:1507.05525.
- Denavit, J. y Hartenberg, R. S. (1955). A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices. *Journal of Applied Mechanics* 22, 215–221.
- Dirac, P. A. M. (1928). The quantum theory of the electron. *Proceedings of the Royal Society A* 117, 610–624.
- Einstein, A. (1905). Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Annalen der Physik* 17, 891–921.
- Einstein, A., Podolsky, B. y Rosen, N. (1935). Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical Review* 47, 777–780.
- Gibbs, J. W. (1902). *Elementary Principles in Statistical Mechanics*. Nueva York: Scribner.
- Giustina, M. et al. (2015). Significant-loophole-free test of Bell’s theorem with entangled photons. *Physical Review Letters* 115, 250401.
- Glashow, S. L. (1961). Partial-symmetries of weak interactions. *Nuclear Physics* 22, 579–588.
- Hensen, B. et al. (2015). Loophole-free Bell inequality violation using electron spins separated by 1.3 kilometres. *Nature* 526, 682–686.
- İnönü, E. y Wigner, E. P. (1953). On the contraction of groups and their representations. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 39, 510–524.
- Kaluza, T. (1921). Zum Unitätsproblem der Physik. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 966–972.
- Klein, O. (1926). Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie. *Zeitschrift für Physik* 37, 895–906.
- Lee, J. G., Adelberger, E. G., Cook, T. S., Fleischer, S. M. y Heckel, B. R. (2020). New test of the gravitational $1/r^2$ law at separations down to $52\ \mu\text{m}$. *Physical Review Letters* 124, 101101.
- Maxwell, J. C. (1865). A dynamical theory of the electromagnetic field. *Philosophical Transactions of the Royal Society* 155, 459–512.
- Minkowski, H. (1909). Raum und Zeit. *Physikalische Zeitschrift* 10, 104–111.
- Schrödinger, E. (1935). Discussion of probability relations between separated systems. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 31, 555–563.
- Shalm, L. K. et al. (2015). Strong loophole-free test of local realism. *Physical Review Letters* 115, 250402.
- Tsirelson, B. S. (1980). Quantum generalizations of Bell’s inequality. *Letters in Mathematical Physics* 4, 93–100.
- Weinberg, S. (1967). A model of leptons. *Physical Review Letters* 19, 1264–1266.
- Witten, E. (1995). String theory dynamics in various dimensions. *Nuclear Physics B* 443, 85–126.